

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ
КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«КРАСНОЯРСКИЙ КОЛЛЕДЖ ОТРАСЛЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА»

РАССМОТРЕНО

методической комиссией
протокол № 6 от «20» июня 2024 г.

УТВЕРЖДЕНО

Директор КГБПОУ «Красноярский колледж
отраслевых технологий и
предпринимательства»

/Н. В. Журова/
Приказ № 01-60-2П от «01» июля 2024 г.

ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ
СПЕЦИАЛИСТОВ СРЕДНЕГО ЗВЕНА

43.02.16 Туризм и Гостеприимство
на базе основного общего образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ОД6.07 МАТЕМАТИКА

Зам. директора по УР
_____/Е.В. Миля /

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 0088911C41FA5D19436198A88477B1D05F
Владелец: Журова Наталья Валерьевна
Действителен: с 28.05.2024 до 21.08.2025

Красноярск, 2024

Организация-разработчик: краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Красноярский колледж отраслевых технологий и предпринимательства»

Разработчик:

Ковалева Ольга Николаевна, преподаватель математики КГБПОУ «Красноярский колледж отраслевых технологий и предпринимательства»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка
2. Перечень практических работ
3. Инструктивно-методические рекомендации по выполнению практических работ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания к проведению практических занятий по учебной дисциплине ОДб.07 Математика, предназначены для обучающихся СПО по специальности **43.02.16 Туризм и Гостеприимство**

Практические занятия/лабораторные работы проводятся с целью усвоения и закрепления практических умений и знаний, овладения профессиональными компетенциями. В ходе практических занятий/лабораторных работ студенты приобретают практические умения, предусмотренные рабочей программой учебной дисциплины ОДб.07 Математика, учатся самостоятельно работать с оборудованием, проводить эксперименты, анализировать полученные результаты и делать выводы, подтверждать теоретические положения лабораторным экспериментом.

При выполнении практических занятий/лабораторных работ по учебной дисциплине ОДб.07 Математика планируется достижение следующих целей:

Знание

- сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики
- понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности
- готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности
- готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности
- отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем
- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием

- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач

Умение

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях
- умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты
- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания
- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников
- владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения
- целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира

Вышеперечисленные умения и знания направлены на формирование у студентов следующих общих и профессиональных компетенций: ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 06, ОК 07, ПК 1.1, 1.4

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практические работы выполняются обучающимися по графику, составленному в соответствии с учебным планом по **43.02.16 Туризм и Гостеприимство** и рабочей программой учебной дисциплины **ОДб.07 Математика**.

Задача практических занятий – закрепить теоретические знания обучающихся и отработать практические навыки и умения в соответствии с планируемыми результатами обучения.

Согласно учебного плана по специальности и программы учебной дисциплины ОДб.07 Математика на практические занятия обучающихся отведено 110 академических часов.

Наименование раздела, номер и тема практического занятия	Количество часов
Раздел 1. Повторение курса математики основной школы	
Процентные вычисления в профессиональных задачах	4*
Входной контроль	2
Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве	
Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые	6*
Раздел 3. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции	
Решение задач. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции	2
Раздел 4. Производная функции, ее применение	
Правила дифференцирования	2
Решение задач на геометрический, физический смысл производной	2
Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах	6*
Раздел 5. Многогранники и тела вращения	
Симметрия многогранников. Примеры симметрии в профессии	4*
Тела вращения (конус)	4*
Раздел 6. Степени и корни. Степенная функция	
Решение иррациональных уравнений и неравенств	2
Решение показательных уравнений и неравенств	2
Решение задач. Логарифмы. Логарифмическая функция	2
Логарифмы в окружающем нас мире	4*
Раздел 7. Элементы теории вероятности и математической статистики	
Составление таблиц и диаграмм на практике	8*
ИТОГО:	50 из них 36*

3. ИНСТРУКТИВНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема занятия: Процентное вычисление в профессиональных задачах (4 часа*)

Содержание темы: отработать умения и навыки вычисления процентов.

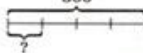
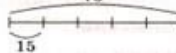
Планируемые образовательные результаты: научить различать прямое и обратное нахождение процента от числа и числа от процента.

Форма организации учебной деятельности: практическая работа

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, схема квартиры, развертка стен комнаты.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Изучить теоретический материал

ПРОЦЕНТЫ		
Определение Процент — это одна сотая часть. $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$	Преобразование процентов Для того чтобы записать проценты десятичной дробью или натуральным числом, нужно число, которое стоит перед знаком %, разделить на 100: $27\% = 27 : 100 = 0,27$; $200\% = 200 : 100 = 2$. Для того чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100 %. $0,15 = 0,15 \cdot 100\% = 15\%$; $1,7 = 1,7 \cdot 100\% = 170\%$	
Основные задачи на проценты		
Нахождение процента от числа $p\% \text{ а равно } \frac{p \cdot a}{100}$. 25 % от числа 300 равно $\frac{25 \cdot 300}{100} = 75$ 	Нахождение числа по данному проценту Если $p\%$ какого-нибудь числа равно b , то это число равно $b : \frac{p}{100} = \frac{100b}{p}$ Если 25 % какого-нибудь числа равно 30, то число равно $\frac{100 \cdot 30}{25} = 120$ 	Нахождение процентного отношения Число a составляет $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ от числа b . Число 15 составляет $\frac{15}{75} \cdot 100\% = 20\%$ от числа 75 
Увеличение на $p\%$ Если число a увеличить на $p\%$, то получим число $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ Если число 200 увеличить на 30 %, то получим число $200 (1 + 0,3) = 200 \cdot 1,3 = 260$	Уменьшение на $p\%$ Если число a уменьшить на $p\%$, то получим число $a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ Если число 120 уменьшить на 30 %, то получим число $120 \cdot (1 - 0,3) = 120 \cdot 0,7 = 84$	Формула сложных процентов Если A — начальный вклад (капитал), p — годового процент, то в конце n -го года вклад (капитал) составит $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

2. Решить задачи:

- С активным развитием внутреннего туризма по данным Росстата на конец 2021 года в России насчитывалось более 28 000 коллективных средств размещения, включая турбазы, глэмпинги, кемпинги, апартаменты и хостелы. За 2022-2023 года количество гостиничных объектов увеличилось на 15-20%. Вычислите количество коллективных средств размещения в России.
- В апартаменте «Вернисаж» в августе 2022 года было произведено 300 бронирований с собственного сайта. А в сентябре 2022 года число бронирований составило 180. Как изменилось число бронирований в сентябре 2022 по сравнению с предыдущим месяцем?
- Средняя цена отеля «Аквамарин» в феврале 2022 года составила 3100 рублей, а в феврале 2023 года 3720 рублей. Как изменилась средняя цена в феврале 2023 по сравнению с аналогичным периодом в прошлом году? Для наглядности и удобства восприятия ответ укажите в процентах.

4. В парке подмосковного отеля «Академический» посажены три вида деревьев: берёзы, дубы и клёны. Берёзы составляют 24% от всех деревьев, 880 деревьев это дубы, а всего деревьев 1375 штук. Сколько процентов составляют клёны от всех деревьев?
5. Авиабилет Москва- Сочи- Москва авиакомпании S7 Airlines стоит 12000 рублей. Двум пассажирам из группы туристов в 10 человек была сделана скидка 6%. Сколько в сумме отдали эти 10 пассажиров за перелёт?

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 2

Тема занятия: Входной контроль (2 часа)

Содержание темы: проверка уровня знаний и умений обучающихся за школьный курс математики

Планируемые образовательные результаты: проверить уровень усвоения материала

Формы организации учебной деятельности: практическая работа

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, схема квартиры, развертка стен комнаты.

Задания для самостоятельного выполнения: задания выдаются по вариантам

1 вариант

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{7}{6} + 3\frac{4}{9}\right) \cdot 4,5$

Ответ: _____

2. Какое из чисел: $\sqrt{3600}$, $\sqrt{3,6}$, $\sqrt{0,36}$ – является иррациональным?

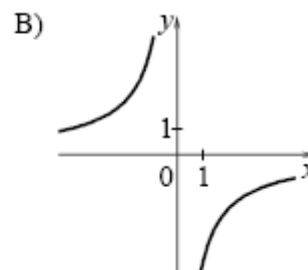
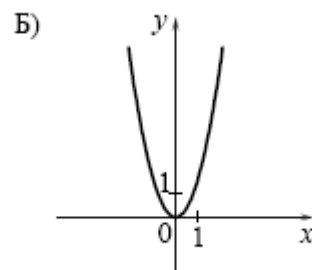
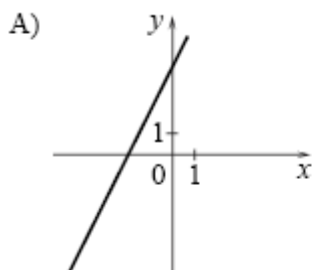
- 1) $\sqrt{3600}$ 2) $\sqrt{3,6}$ 3) $\sqrt{0,36}$ 4) ни одно из этих чисел

Ответ: _____

3. Решите уравнение: $5 - \frac{1}{2}(2x - 6) = 3(3 - x)$

Ответ: _____

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



- 1) $y = 2x - 4$ 2) $y = -\frac{4}{x}$ 3) $y = 2x^2$ 4) $y = 2x + 4$

А	Б	В

Ответ:

5. Арифметическая прогрессия задана первыми двумя членами: $a_1 = 8$, $a_2 = 5$. Найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии.

Ответ: _____

6. Для каждого неравенства укажите множество его решений

а) $x^2 - 4x > 0$

1) $(-4; 0)$

б) $x^2 + 4x < 0$

2) $(-4; 4)$

в) $4x^2 - 64 < 0$

3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

А	Б	В

Ответ: _____

7. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах B и C равны 105° и 145° соответственно. Найдите градусную меру угла A .

Ответ: _____

8. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 20, основание AC равно 32. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

Ответ: _____

9. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-8; -12)$ имеет координаты $(4; -14)$. Найдите ординату точки B .

Ответ: _____

10. В таблице приведены нормативы по прыжкам в длину для учащихся девятых классов. Оцените результат девочки, прыгнувшей в длину 3,85 м.

	Мальчики			Девочки		
отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Длина, см	430	380	330	370	330	290

1) отметка «5»

3) отметка «3»

2) отметка «4»

4) норматив не выполнен

Ответ: _____

11. Билет в театр стоит 500 рублей. Школьникам предоставляется скидка в размере 30% от полной стоимости билета. Сколько рублей нужно заплатить за билеты на группу, состоящую из 32 школьников и 3 учителей.

Ответ: _____

12. Записан рост (в сантиметрах) шести учащихся: 152, 158, 137, 130, 134, 147. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

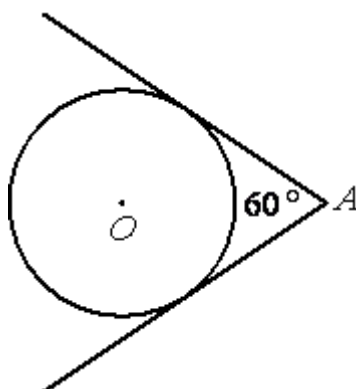
Ответ: _____

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - 4x + 8 = y. \end{cases}$$

Ответ: _____

14. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O . Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60° , а расстояние от точки A до точки O равно 8.



Ответ: _____

2 вариант

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{11}{8} - 1\frac{7}{11}\right) \cdot 2,2$

Ответ: _____

2. Какое из чисел: $\sqrt{0,625}$, $\sqrt{6,25}$, $\sqrt{6250}$ – является рациональным?

1) $\sqrt{0,625}$

2) $\sqrt{6,25}$

3) $\sqrt{6250}$

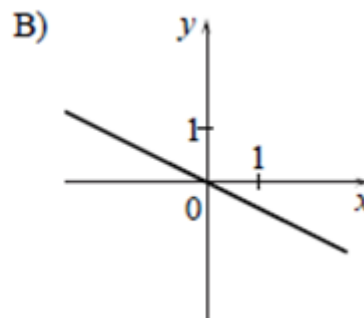
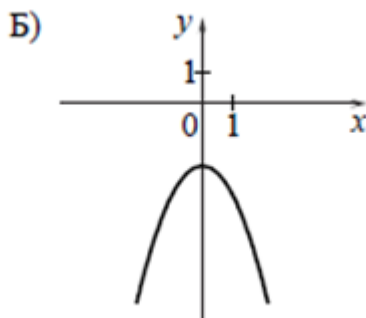
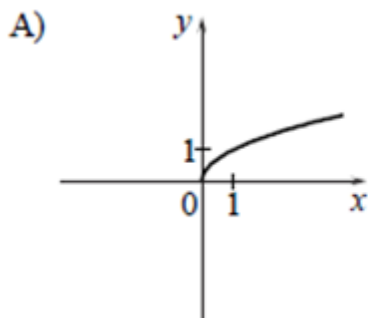
4) ни одно из этих чисел

Ответ: _____

3. Решите уравнение: $10 - 8(x - 6) = 2 - 4x$

Ответ: _____

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y = -\frac{1}{x}$

3) $y = -x^2 - 2$

4) $y = \sqrt{x}$

А	Б	В

Ответ:

5. Арифметическая прогрессия задана первыми двумя членами: $a_1 = 4$, $a_2 = 9$. Найдите сумму первых 10 членов этой прогрессии.

Ответ: _____

6. Для каждого неравенства укажите множество его решений

а) $x^2 + 9 > 0$

1) $(-3; 3)$

б) $x^2 - 9 > 0$

2) $(-\infty; \infty)$

в) $x^2 - 9 < 0$

3) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

А	Б	В

Ответ:

7. В треугольнике ABC угол A равен 46° , внешний угол при вершине B равен 115° . Найдите градусную меру угла C .

Ответ: _____

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 14, а $\cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Ответ: _____

9. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-3; 2)$ имеет координаты $(6; -15)$. Найдите абсциссу точки B .

Ответ: _____

10. В таблице приведены нормативы по бегу на дистанцию 60 метров для учащихся девятых классов. Оцените результат мальчика, пробежавшего 60 метров за 9,1 секунды.

	Мальчики			Девочки		
отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, сек	8,4	9,2	10,0	9,4	10,0	10,5

1) отметка «5»

3) отметка «3»

2) отметка «4»

4) норматив не выполнен

Ответ: _____

11. Билет в музей стоит 150 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 40% от полной стоимости билета. Сколько рублей нужно заплатить за билеты на группу, состоящую из 28 школьников и 2 учителей.

Ответ: _____

12. Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

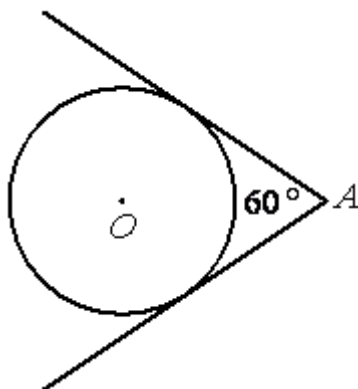
Ответ: _____

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 - 11x + 14 = 2y. \end{cases}$$

Ответ: _____

14. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O . Найдите расстояние от точки A до точки O , если угол между касательными равен 60° , а радиус окружности равен 6.



Ответ: _____

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 3

Тема занятия: Взаимное расположение прямых в пространстве (Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые) (6* часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимное расположение прямых в пространстве», «Перпендикуляр и наклонная», закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщить и систематизировать знания по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, линейка, карандаш

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Решение задач на взаимное расположение прямых и плоскостей

Теоретические сведения к практической работе:

Теорема

Две прямые называются скрещивающимися, если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке не принадлежащей 1 прямой.

Определение.

2 прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются

Определение.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

Задание для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1) Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, точка K – середина DC.

а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если угол ABC равен 40° , а угол BCA = 80° .

Ответ обобщите.

2) Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть
 а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка B не лежит в плоскости $\triangle ADC$. Точки M , N и P – середины отрезков BA , BC , BD соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ADC) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP , если $S_{\triangle ADC} = 48 \text{ см}^2$.

Вариант 2.

1) Основание трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

1) Каково взаимное расположение EF и AB ?

2) Чему равен угол между прямыми EF и AB , если угол $ABC = 150^\circ$. Ответ обоснуйте.

2) Прямые a и b лежат в пересекающихся плоскостях α и β . Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.

3) В тетраэдре $DABC$ точки M , N и P – середины рёбер DA , DB , DC соответственно.

а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ABC) параллельны.

б) Найти площадь $\triangle ABC$, если $S_{\triangle MNP} = 14 \text{ см}^2$.

Задание 2. Параллельность плоскостей и прямых в пространстве»

Теоретические сведения к практической работе:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

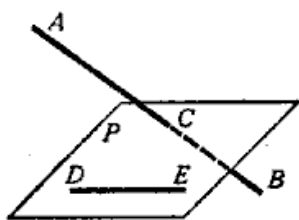
2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые



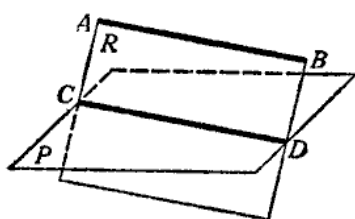
Возьмём, например, две такие прямые AB и DE , из которых одна пересекает некоторую плоскость P , а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P .

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P , пересекающая прямую AB , и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

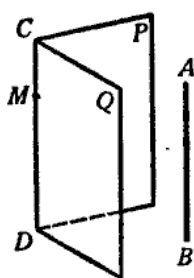
Прямая и плоскость параллельные между собой



Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

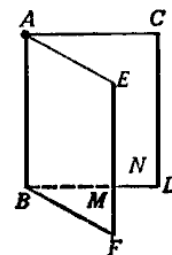
Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).



Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

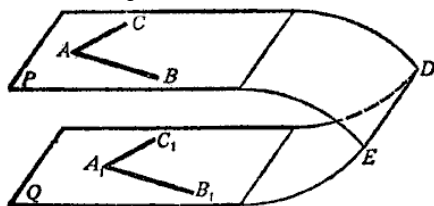
Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.



Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q .



Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

- 1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.
- 2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данную прямую и точку в пространстве?
- 3) В пространстве даны прямая и точка M . Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a ?
- 4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?
- 5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b . Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b ?
- 6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a , а другая – через b ?
- 7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a и b и не лежащая на них точка M . Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямым a и b ?

Задание 3. Решение задач на перпендикуляр и наклонную

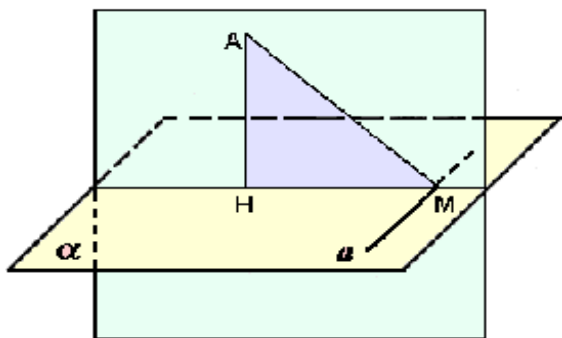
Теоретические сведения к практической работе:

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Расстоянием от точки до плоскости называется *длина перпендикуляра*, проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.



АН- перпендикуляр

АМ- наклонная

НМ – проекция наклонной на данную плоскость

a - прямая, проходящая через основание наклонной

Задания для самостоятельного решения

1. Наклонная АМ, проведенная из точки А к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой АМ и данной плоскостью равен 45° ?
2. Из точки А, удаленной от плоскости γ на расстояние d , проведены к этой плоскости наклонные АВ и АС под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в 120° . Найдите ВС.

Задание 4. Решение задач на теорему о трех перпендикулярах

Теоретические сведения к практической работе:

Опр. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

В задачах часто используется теорема о 3-х перпендикулярах:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

№1. Через вершину В квадрата ABCD проведена прямая BF перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до вершины С, если $BF=8$ см, сторона квадрата равна 4 см.

№2. Дан прямоугольник ABCD. Через вершину В проведена прямая BM перпендикулярно к его плоскости. Найдите AD, если $AM=5$ см, $MD=8$ см.

№3. Через точку О пересечения диагоналей квадрата со стороной 5 см проведена прямая ОК=6 см перпендикулярно к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки А до вершины квадрата

№4. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного ΔABC , $AB=AC=5$, $BC=6$, $AD=12$, AE-высота ΔABC . Найдите AE, DE, BD, DC

Вариант 2

№1. Через вершину В квадрата ABCD проведена прямая BF перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до вершины А, если $BF=8$ см, сторона квадрата равна 4 см.

№2. Дан прямоугольник ABCD. Через вершину В проведена прямая BM перпендикулярно к его плоскости. Найдите AD, если $AM=3$ см, $MD=7$ см.

№3. Через точку О пересечения диагоналей квадрата со стороной 10 см проведена прямая ОК=5 см перпендикулярно к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки А до вершины квадрата.

№4. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного $\triangle ABC$, $AB=AC=5$, $BC=6$, $AD=12$, AE-высота $\triangle ABC$. Найдите AE, DE, BD, DC

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 4

Тема занятия: Решение задач «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания и умения решения тригонометрических уравнений и неравенств

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Решите уравнения:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$ б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\operatorname{tg} x = 1$ г) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$
д) $2 \cos 2x + \sqrt{2} = 0$ е) $3 \sin x + 6 = 0$ ж) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$ з) $\operatorname{ctg} x - 1 = 0$

3. Решить уравнения, сделав подстановку:

а) $2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$
б) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 1 = 0$
в) $2 \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$

4. Решите уравнения методом разложения на множители:

а) $5 \sin x + 3 \sin x \cos x = 0$ б) $\sin 4x - \sin 2x = 0$

5. Решите уравнения, используя однородность:

а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ б) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

6. Решите неравенства:

а) $\cos x > \frac{1}{2}$ б) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\operatorname{ctg} x < -1$ г) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 5

Тема занятия: Правила дифференцирования. (2 часа)

Содержание темы: Научиться находить производные суммы, произведения, частного, производные сложных функций.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка
Задания для самостоятельного выполнения:

1. Изучить теоретический материал

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf в точке x_0 к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, если этот предел существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Таблица производных

1 $(c)' = 0$

2 $(x^n)' = nx^{n-1}, n \neq -1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

3 $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1; (e^x)' = e^x$

4 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

5 $(\sin x)' = \cos x$

6 $(\cos x)' = -\sin x$

7 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Формулы дифференцирования

Нахождение производной функции называется дифференцированием.

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ - дифференцируемые функции, тогда

1 $(u + v)' = u' + v'$

2 $(uv)' = u'v + uv'$

3 $(cu)' = cu'$, т. е. числовой множитель сохраняется при нахождении производной.

4 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^{10} + 2^x - \sqrt{x} + 4$.

Решение.

Применим первое правило дифференцирования:

$$f'(x) = (x^7)' + (2^x)' - (\sqrt{x})' + (4)' = 7x^6 + 2^x \ln 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ т. е. для каждого слагаемого мы нашли}$$

производную по таблице производных. Производная последнего слагаемого равна нулю, т. к. слагаемое не содержит переменную.

Пример 2

Найти $f'(0)$, если $f(x) = x^{10} + 10^x$.

Решение.

Найдем сначала $f'(x)$: $f'(x) = (x^{10} + 10^x)' = 10x^9 + 10^x \ln 10$.

Подставим в производную $x=0$: $f'(0) = 10 \cdot 0^9 + 10^0 \ln 10 = \ln 10$.

Пример 3. Найти $f'(x)$, если $f(x) = 3x^8 + 10x^3 - 4x + \frac{2}{x^5} + 18$.

Решение.

Воспользуемся третьим правилом дифференцирования, т. е. перепишем числовые множители, стоящие перед каждым слагаемым, и найдем производные для оставшихся частей слагаемых с помощью таблицы: $f'(x) = 3(x^8)' + 10(x^3)' - 4(x)' + \frac{2}{x^5}' + (18)'$, а четвертое слагаемое представим в

виде $2 \cdot \left(\frac{1}{x^5}\right)$. Тогда получим выражение :

$$f'(x) = 3 \cdot 8x^7 + 10 \cdot 3x^2 - 4 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{x^6}\right) = 24x^7 + 30x^2 - 4 - \frac{10}{x^6}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = 5x^3 - \frac{3}{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$.

Решение. 1 способ

Перепишем функцию в виде $y = 5x^3 - 3x^{-2} - x^{\frac{4}{3}}$, тогда

$$\begin{aligned} y' &= \left(5x^3 - 3x^{-2} - x^{\frac{4}{3}}\right)' = (5x^3)' - (3x^{-2})' - \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = 5 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot (-2x^{-2-1}) - \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \\ &= 15x^2 + 6x^{-3} - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = 15x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}. \end{aligned}$$

2 способ

Слагаемое $-\frac{3}{x^2}$ представим в виде $-3 \cdot \frac{1}{x^2}$, а затем применим правила дифференцирования:

$$y' = 5(x^3)' - 3 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)' - (x^{\frac{4}{3}})' = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} =$$

$$= 15x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = 15x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = x^2 e^x$.

Решение.

Для нахождения производной воспользуемся правилом 2 (правило производной произведения двух функций).

Здесь $u = x^2, v = e^x$. Тогда $y' = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2)$.

Пример 6. Найти производную функции $y = \frac{x^2 - 4x}{5 - x}$.

Решение.

Для нахождения производной воспользуемся правилом 4 (нахождение производной дроби). Здесь

$$u = x^2 - 4x, v = 5 - x$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 - 4x}{5 - x} \right)' = \frac{(x^2 - 4x)'(5 - x) - (x^2 - 4x)(5 - x)'}{(5 - x)^2} = \frac{(2x - 4)(5 - x) - (x^2 - 4x)(-1)}{(5 - x)^2} = \\ &= \frac{10x - 2x^2 - 20 + 4x + x^2 - 4x}{(5 - x)^2} = \frac{-x^2 + 10x - 20}{(5 - x)^2}. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти значение производной функции $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$ в точках $x = -4; x = 1$.

Решение.

Найдем производную функции $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$: $y' = 3x^2 + 12x - 15$.

Найдем значение производной в заданных точках:

$$y'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) - 15 = 48 - 48 - 15 = -15 \text{ и } y'(1) = 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 15 = 0.$$

Ответ: $y'(-4) = -15; y'(1) = 0$.

Производная сложной функции.

Определение. Функция называется сложной, если ее аргумент – другая функция. Например:

$$y = \sin^4 x, y = (3x - 5)^6, y = \sqrt{4 - 7x}, y = 3^{8x-1} \text{ и т. д.}$$

Пусть $y = g(t), t = f(x)$, тогда $y'(x) = g'(t) \cdot f'(x)$. Т. е. производная сложной функции равна произведению производной всей функции на производную аргумента сложной функции или произведению производной внешней функции на производную внутренней.

Для нахождения производной сложной функции ее аргумент (внутреннюю функцию) заменим другой производной, тем самым сведем сложную функцию к виду простой. Это будет внешняя функция. Затем производную внешней функции умножим на производную внутренней.

Пример 8. Найти производную сложной функции $y = tg^4 x$.

Решение.

Внутренняя функция $t = \operatorname{tg} x$, а внешняя функция $v = t^4$.

Применяя формулу для нахождения производной сложной функции, получим

$$y' = (t^4)' \cdot (\operatorname{tg} x)' = 4t^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 4\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}.$$

Пример 9. Найти производную сложной функции $y = \ln(3x^2 - 1)$.

Решение.

Внутренняя функция $t = 3x^2 - 1$, внешняя функция $v = \ln t$.

По формуле нахождения производной сложной функции имеем

$$y' = (\ln t)' (3x^2 - 1)' = \frac{1}{t} \cdot 6x = \frac{1}{3x^2 - 1} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 - 1}.$$

Пример 10. Найти производную сложной функции $y = (3x^2 - 1)^{10}$.

Решение.

Внутренняя функция $t = 3x^2 - 1$, внешняя функция $v = t^{10}$.

По формуле нахождения производной сложной функции имеем

$$y' = (t^{10})' (3x^2 - 1)' = 10t^9 \cdot 6x = 10(3x^2 - 1)^9 \cdot 6x = 60x(3x^2 - 1)^9.$$

Пример 11. Найти производную сложной функции $y = \sqrt{5x^3 + 4}$.

Решение.

Внутренняя функция $t = 5x^3 + 4$, внешняя функция $y = \sqrt{t}$.

По формуле нахождения производной сложной функции имеем

$$y' = (\sqrt{t})' (5x^3 + 4)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 15x^2 = \frac{1}{2\sqrt{5x^3 + 4}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3 + 4}}.$$

Пример 12. Найти производную сложной функции $y = 3^{4x^3 - 5x + 3}$.

Решение.

Внутренняя функция $t = 4x^3 - 5x + 3$, внешняя функция $y = 3^t$.

По формуле нахождения производной сложной функции имеем

$$y' = (3^t)' (4x^3 - 5x + 3)' = 3^t \ln 3 \cdot (12x^2 - 5) = 3^{4x^3 - 5x + 3} \ln 3 \cdot (12x^2 - 5).$$

2. Выполнить задания

1. Найти производную функции

1) $y = 3x^6 + \frac{2}{x} - 4$;

2) $y = (2x - 5)(6 + 4x^3)$;

3) $y = \frac{3 - 2x}{x + 4}$.

2. Найти значение производной

функции $y = 2x^2 - 3x^3 + 4x$ в точке $x = 3; x = -1$.

3. Найти производную сложной функции:

1) $y = (3x^4 - x)^7$;

2) $y = \sqrt{12x^3 + 4x}$;

3) $y = \sin 8x, x_0 = \frac{\pi}{3}$;

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 6

Тема занятия: Решение задач на геометрический, физический смысл производной. (2 часа)

Содержание темы: Научиться находить угловой коэффициент касательной к заданной кривой. Научиться составлять уравнения касательной и нормали, проведенных к графику данной функции в точке касания. Находить скорость и ускорение по заданному закону движения.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Изучите теоретический материал и разобрать примеры

Геометрический смысл производной.

Определение. *Касательной* к данной кривой в данной точке А называется предельное положение секущей АВ, когда точка В, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке А.

Определение. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно секущей, называется *нормалью* к кривой в данной точке.

Определение. *Угловой коэффициент* касательной к кривой равен тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox и равен значению производной функции, задающей кривую, в точке касания: $f'(x_A) = k = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox .

Уравнение касательной имеет вид: $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$.

Уравнение нормали имеет вид: $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$

Пример 1. Найти тангенс угла наклона касательной к параболе $y = x^2 - x + 1$ к оси Ox в точке $x_1 = -1$.

Решение.

Найдем производную: $y' = 2x - 1$. Т. к. $x_1 = -1$, найдем значение производной в данной точке:
 $y'(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Следовательно, $k = \operatorname{tg} \alpha = -3$.

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = 3x^2 - 12x + 8$ в точке $x_1 = 2$.

Решение.

Найдем производную функции: $y' = 3 \cdot 2x - 12 = 6x - 12$. Вычислим значение производной в точке $x_1 = 2$: $y'(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$. Следовательно, $k = 0$.

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y = 3x^2 - x$ в точке $x_1 = -1$.

Решение.

Найдем производную заданной функции и вычислим ее значение в точке $x_1 = -1$: $y' = 6x - 1$,
 $k = y'(-1) = -7$. Значение функции в точке $x_1 = -1$ равно: $y_1 = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$. Подставим полученные значения в уравнения касательной и нормали:

1) $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -7(x + 1) \Rightarrow y = -7x - 3$ или $y + 7x + 3 = 0$ - уравнение касательной.

2) $y - y_1 = \frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{7}(x + 1) \Rightarrow x - 7y + 29 = 0$ или $7y = x + 29$ - уравнение нормали.

Физический смысл производной.

При прямолинейном движении точки скорость в данный момент времени есть производная от пути по времени, вычисленная для данного момента: $v = S'(t_0)$.

Ускорение в данный момент времени есть производная от скорости по времени: $a = v'(t_0)$.

Пример 4. Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

Решение.

Скорость движения в любой момент времени найдем как производную от пути по времени:
 $v = S'(t) = 6t^2 + 2t$, тогда в момент времени $t_0 = 4$ с скорость будет иметь значение:
 $v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 96 + 8 = 104$ (м/с).

Ускорение движения в любой момент времени найдем как производную скорости по времени:
 $a = v'(t) = 12t + 2$, тогда в момент времени $t_0 = 4$ с ускорение будет иметь значение:
 $a = v'(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50$ (м/с²).

Пример 5. При торможении маховик поворачивается на угол $\varphi = 3 + 8t - t^2$ за время t . Найти угловую скорость ω в момент времени $t_0 = 3$ с; угловое ускорение ε в момент времени $t_0 = 3$ с; момент времени, когда вращение прекратится.

Решение.

- 1) Найдем угловую скорость: $\omega = \varphi'(t) = 8 - 2t$. Значение угловой скорости при $t_0 = 3$ с будет равно: $\omega(3) = 8 - 2 \cdot 3 = 2$ (рад/с).
- 2) Найдем угловое ускорение как производную угловой скорости: $\varepsilon = -2$.
- 3) В момент времени, когда движение прекратится, угловая скорость будет равна нулю:
 $8 - 2t = 0$ Отсюда найдем t : $t = 4$ с.

2. Выполнить практические задания по вариантам

Вариант 1	Вариант 2
1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3$. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 4$ с. 2. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$. 3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x - 4 \cos x + 2$ в точке абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.	1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = 2t^3 - 5t^2 + 6$. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с. 2. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2 + 6x + 8$ в точке с абсциссой $x = -2$. 3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 4x - x^3 + \frac{6}{x} + 15$ в точке абсциссой $x = 4$.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради

Практическое занятие № 7

Тема занятия: Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах (6 * часов)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Провести дидактическую игру «Крестики- нолики» по теме «Производная функции». К доске приглашаются два студента. На доске подготовлено игровое поле. Первый,

ответивший на вопрос преподавателя по данной теме, получает право выбрать знак («крестик» или «нолик») для себя и назвать первое окошко игрового поля. Если он решает правильно выпавшее ему задание, то имеет право поставить в данное окошко свой знак. Если ему это не удастся, то право решить его отдается второму игроку. В итоге побеждает тот, кто закрывает своими значками 3 клетки по диагонали, горизонтали, вертикали или больше, чем 4 клетки.

Примеры:

$$1. f(x) = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - 7,$$

$$2. f(x) = \sqrt{x^3} - 2x\sqrt{x} + \pi,$$

$$3. f(x) = \frac{2}{x-1},$$

$$4. f(x) = \ln \cos x,$$

$$5. f(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$6. f(x) = x + \frac{4}{x},$$

$$7. f(x) = x^2(x+3),$$

$$8. f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - 3,$$

$$9. f(x) = 2\sqrt{3}\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}2x.$$

Задание 2. Разберите решение задачи.

Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

Вспомним 3 этапа математического моделирования, применяемые при решении задач на оптимизацию (показ на экране):

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x , а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

$$S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$$

Итак,

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения $S(x)$ на $(0; \infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную $S'(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x} \right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2} \right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$$

Для нахождения критических точек решим уравнение $S'(x) = 0$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Корень уравнения:

$$\text{При } x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad S'(x) < 0, \text{ а при } x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad S'(x) > 0.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Следовательно, в точке $S(x)$ имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S'	–	0	+
S		min	

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V , будет наименьшей

$$h = 2x = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

при

т.е. когда цилиндр равносторонний.

Задание 3. Решите задачи.

А) Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 X 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Б) Требуется огородить прямоугольный участок земли площадью 294 м² и разделить этот земельный участок забором на 2 равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора окажется минимальной?

В) Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Г) Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы приняв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

Д) Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 8

Тема занятия: Симметрия многогранников (4* часа)

Содержание темы: сформировать представление о симметрии, примеры симметрии многогранников, симметрия в окружающем нас мире.

Планируемые образовательные результаты: знать виды правильных многогранников, уметь видеть и определять симметрию в окружающем мире.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, калькулятор

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать и законспектировать теоретический материал

Эпиграф

"Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук".

Л. Кэрролл

На данный момент уже вы имеете представление о таких многогранниках как призма и пирамида. На сегодняшнем уроке у вас есть возможность значительно расширить свои знания о многогранниках, вы узнаете о так называемых правильных выпуклых многогранниках. С некоторыми понятиями вы уже знакомы - это многогранники и выпуклые многогранники. Вспомним их.

- Дайте определение многогранника.
- Какой многогранник называется выпуклым?

Нами уже использовались словосочетания "правильные призмы" и "правильные пирамиды". Оказывается, новая комбинация знакомых понятий образует совершенно новое с геометрической точки зрения понятие. Какие же выпуклые многогранники будем называть правильными? Послушайте внимательно определение.

Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многогранниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Может показаться, что вторая часть определения является лишней и достаточно сказать, что выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многогранниками с одним и тем же числом сторон. Достаточно ли этого на самом деле?

Посмотрите на многогранник. (*Демонстрируется модель многогранника, который получается из двух правильных тетраэдров, приклеенных друг к другу одной гранью*). Оставляет ли он впечатление правильного многогранника? (*Нет!*). Посмотрим на его грани - правильные треугольники. Посчитаем число рёбер, сходящихся в каждой вершине. В некоторых вершинах сходятся три ребра, в некоторых - четыре. Вторая часть определения правильного выпуклого многогранника не выполняется и рассматриваемый многогранник, действительно, не является правильным. Таким образом, когда будете давать определение, помните об обеих его частях.

Всего существует пять видов правильных выпуклых многогранников. Их гранями являются правильные треугольники, правильные четырёхугольники (квадраты) и правильные пятиугольники.

Названия этих многогранников пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней:

- "эдра" - грань
- "тетра" - 4
- "гекса" - 6
- "окта" - 8
- "икоса" - 20
- "додека" - 12

Вам необходимо запомнить названия этих многогранников, уметь охарактеризовать каждый из них и доказать, что других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

Обращаю внимание на слова Л. Кэрролла, которые являются

эпиграфом сегодняшнего урока: "Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук".

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин. Подсчитаем и мы число указанных элементов Платоновых тел и занесём результаты в таблицу № 1.

Анализируя таблицу № 1, возникает вопрос: "Нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?" По-видимому, нет. Например, в столбце "грани" казалось бы, просматривается закономерность ($4 + 2 = 6$, $6 + 2 = 8$), но затем намеченная закономерность нарушается ($8 + 2 = 12$, $12 + 2 = 20$). В столбце "вершины" нет даже стабильного возрастания.

Число вершин то возрастает (от 4 до 8, от 6 до 20), а то и убывает (от 8 до 6, от 20 до 12). В столбце "рёбра" закономерности тоже не видно.

Но можно рассмотреть сумму чисел в двух столбцах, хотя бы в столбцах "грани" и "вершины" ($G + B$). Составим новую таблицу своих подсчётов (см. табл. № 2). Вот теперь закономерности может не заметить только "слепой". Сформулируем её так: "Сумма числа граней и вершин равна числу рёбер, увеличенному на 2", т.е.

$$G + B = P + 2$$

Итак, мы вместе "открыли" формулу, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее вновь открыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она носит. Формула Эйлера верна для любых выпуклых многогранников.

Запомните эту формулу, она пригодится вам для решения некоторых задач.

Большой интерес к формам правильных многогранников проявляли также скульпторы, архитекторы, художники. Их всех поражало совершенство, гармония многогранников. Леонардо да Винчи (1452 - 1519) увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Сальвадор Дали на картине "Тайная вечеря" изобразил И. Христа со своими учениками на фоне огромного прозрачного додекаэдра.

Учёным достаточно хорошо изучены правильные выпуклые многогранники, доказано, что существует всего пять видов таких многогранников, но сам ли человек их придумал. Скорее всего - нет, он "подсмотрел" их у природы.

"Правильные многогранники и природа": Правильные многогранники встречаются в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (*Circjgjnja icosahdra*) по форме напоминает икосаэдр (рис. 8).



Чем же вызвана такая природная геометризация феодалов? По-видимому, тем, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи.

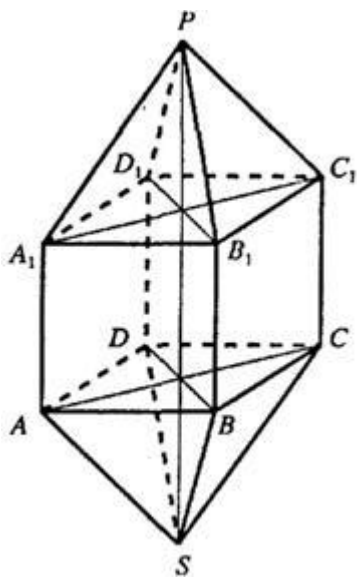
Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Взять хотя бы поваренную соль, без которой мы не можем обойтись.

Известно, что она растворима в воде, служит проводником электрического тока. А кристаллы поваренной соли (NaCl) имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.

В разных химических реакциях применяется сурьмянистый сернокислый натрий - вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьмянистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра.

Последний правильный многогранник - икосаэдр передаёт форму кристаллов бора (B). В своё время бор использовался для создания полупроводников первого поколения.

Задание 2. Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.



Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде конспекта и решения задачи в тетради.

Практическое занятие № 9

Тема занятия: Конус и его элементы. (4* часа)

Содержание темы: научить студентов, находить элементы конуса, воспитать самостоятельность, творческий подход к решению практических задач.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка.

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Построить конус и назвать его элементы

Пример.

Постройте круговой конус и проведите сечение через две образующие конуса, не являющееся осевым. Обозначьте и выпишите:

- 1) Высоту конуса.
- 2) Высоту сечения.
- 3) Расстояние от центра основания до сечения.

Задание 2. Решить задачи

1. Высота конуса равна 4. Образующая равна 5. Чему равен диаметр конуса?
2. Высота конуса равна радиусу основания. Чему равен угол между образующей и основанием конуса?
3. Образующая конуса равна 2 и наклонена к радиусу под углом 45° . Чему равна высота конуса?
4. Образующая конуса равна 2, а высота равна радиусу. Найти площадь основания.
5. Угол между образующими конуса равен 90° . Диаметр основания равен 6. Найти длину образующей.
6. Образующая конуса равна 13, а его высота равна 12. Найдите площадь осевого сечения конуса.
- 7.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 10

Тема занятия: Решение иррациональных уравнений и неравенств (2 часа)

Содержание темы: научиться решать иррациональные уравнения и неравенства

Планируемые образовательные результаты: умения решать иррациональные уравнения и неравенства

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Изучить теоретический материал

Весьма распространенный прием решения иррациональных уравнений и неравенств – возведение в квадрат. Тем не менее советуем вам пользоваться им как можно реже, ибо он обладает существенными недостатками: во-первых, возводя в квадрат обе части уравнения, вы расширяете область допустимых значений неизвестного, что может привести к появлению посторонних корней; во-вторых, часто в результате этой операции получается уравнение с громоздкими коэффициентами, работать с которыми затруднительно (особенно если на экзамене не разрешается пользоваться калькулятором). Наконец, главный недостаток этого приема – увеличение вдвое степени уравнения. Возведя обе части в квадрат, вы можете избавиться от иррациональностей, но получить рациональное уравнение степени выше второй, способы решения которого в общем виде вам неизвестны или вообще не существуют.

Если возводить в квадрат все-таки приходится, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. В частности, если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то для корней должно выполняться условие $g(x) \geq 0$ (при этом $f(x) = g^2(x) \geq 0$, и условие $f(x) \geq 0$ отдельно ставить не требуется). Еще один способ обнаружить посторонние корни – проверка всех найденных корней подстановкой из в первоначальное уравнение.

Пример 1. $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 4x - 8$.

Корни должны удовлетворять условию $4x - 8 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. Возведем обе части в квадрат: $x^2 + 4x - 5 = 16x^2 - 64x + 64$, $15x^2 - 68x + 69 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{23}{15} < 2$ - посторонний корень.

Ответ: $x = 3$.

Замена переменной очень полезна при решении иррациональных уравнений. Часто с ее помощью удается избежать необходимости возведения в квадрат.

Пример 2. $2\sqrt{x^2 - 7x + 19} + x^2 - 7x + 4 = 0$.

Поскольку неизвестное входит в подкоренное выражение и в рациональную часть уравнения в виде одной и той же комбинации $(x^2 - 7x)$, можно сделать замену: $t = \sqrt{x^2 - 7x + 19}$ ($t \geq 0$), тогда $x^2 - 7x = t^2 - 19$, и t определяется из уравнения: $2t + t^2 - 19 + 4 = 0$, $t^2 + 2t - 15 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -5 < 0$ – не соответствует условию на знак t .

Обратная замена: $\sqrt{x^2 - 7x + 19} = 3$, $x^2 - 7x + 19 = 9$, $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Ответ: $x = 2$, $x = 5$.

Пример 3. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + 4\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = 5$.

Подкоренные выражения – взаимно обратные дроби, поэтому замена $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ ($t \geq 0$) приводит

к уравнению $t + \frac{4}{t} = 5$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

А) $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 1$, $\frac{x+1}{1-x} = 1$, $x+1 = 1-x$, $x = 0$.

Б) $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 4$, $\frac{x+1}{1-x} = 16$, $x+1 = 16-16x$, $x = \frac{15}{17}$.

Ответ: $x = 0$, $x = \frac{15}{17}$.

Обращаем ваше внимание на то, что в этих двух заданиях не было необходимости в проверке корней или задании каких-либо ограничений: значения x определялись из условия, что корень принимает некоторое неотрицательное значение.

Пример 4. $\sqrt{x} + \sqrt{x-16} = \sqrt{32-x}$.

Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{x-16} = \sqrt{32-x} - \sqrt{x}$ и возведем обе части в квадрат, не задавая никаких ограничений: проще будет в конце работы проверить получившиеся корни.

$x-16 = (\sqrt{32-x} - \sqrt{x})^2$, $x-16 = 32-x-2\sqrt{32x-x^2}+x$, $2\sqrt{32x-x^2} = 48-x$.

Еще раз возведем в квадрат обе части полученного равенства:

$4(32x-x^2) = 2304-96x+x^2$, $5x^2-224x+2304=0$, $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{144}{5}$.

Проверка:

А) $x = 16$: $\sqrt{16} + \sqrt{16-16} = 4$; $\sqrt{32-16} = 4$ – $x = 16$ – корень уравнения.

Б) $x = \frac{144}{5}$: $\sqrt{\frac{144}{5}} + \sqrt{\frac{144}{5}-16} = \frac{12}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{32-\frac{144}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \neq \frac{20}{\sqrt{5}}$ –

$x = \frac{144}{5}$ – не корень уравнения.

Ответ: $x = 16$.

Пример 5. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = 2$.

В этом уравнении замена $t = \sqrt{x-4}$ ($t \geq 0$) поможет ограничиться только одним возведением в квадрат: $x = t^2 + 4$; $\sqrt{t^2+1} + t = 2$, $\sqrt{t^2+1} = 2 - t$, $\begin{cases} t^2 + 1 = 4 - 4t + t^2, \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$,

$$4t = 3, \quad t = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{9}{16} + 4 = \frac{73}{16}.$$

Ответ: $x = \frac{73}{16}$.

Рассмотрим еще одну группу иррациональных уравнений, которые решаются с помощью разложения на множители.

Пример 6. $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2} = x^2 - 36$.

ОДЗ задается условием: $36+10x-x^2 \geq 0$, $5-\sqrt{61} \leq x \leq 5+\sqrt{61}$. Запишем уравнение в виде: $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2} = (x-6)(x+6)$, $(x+6)(\sqrt{36+10x-x^2} - (x-6)) = 0$.

А) $x+6=0$, $x=-6 < 5-\sqrt{61}$ – посторонний корень.

Б) $\sqrt{36+10x-x^2} - (x-6) = 0$, $\sqrt{36+10x-x^2} = x-6$, $\begin{cases} 36+10x-x^2 = x^2 - 12x + 36, \\ x-6 \geq 0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x^2 - 11x = 0 \\ x \geq 6 \end{cases}, \quad x = 11 \text{ (корень первого уравнения } x = 0 \text{ не удовлетворяет второму условию). Итак,}$$

единственный корень исходного уравнения – $x = 11$.

Ответ: $x = 11$.

Нередко в иррациональных уравнениях присутствуют и модули. В этом случае при решении нужно использовать приемы работы и с иррациональными, и с модульными уравнениями.

Пример 7. $|\sqrt{x}-3| = x - \sqrt{x} - 1$.

Сделаем замену: $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$) и получим для t уравнение $|t-3| = t^2 - t - 1$.

А) $t \geq 3$, $t-3 = t^2 - t - 1$, $t^2 - 2t + 2 = 0$, $D < 0$ – решений нет.

Б) $t < 3$, $-t+3 = t^2 - t - 1$, $t^2 = 4$, $t_1 = 2$, $t_2 = -2 < 0$ – посторонний корень.

Итак, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Перейдем к решению иррациональных неравенств. Если применять возведение в квадрат, то неравенство преобразуется в систему (или несколько систем) рациональных неравенств, в которые входят все необходимые ограничения.

Пример 9. $\sqrt{x^2 - 4x - 140} \leq 4x - 72$.

Вспомним свойства неравенств: если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат знак неравенства не меняется; если отрицательны, то знак меняется на противоположный; если же левая и правая части имеют разные знаки, то возведение в квадрат является некорректной операцией.

В данном неравенстве подкоренное выражение, разумеется, должно быть неотрицательным. Кроме того, значения правой части не меньше квадратного корня, то есть для решений неравенства правая часть может быть только неотрицательной. При выполнении этих условий мы имеем право возвести обе части в квадрат с сохранением знака неравенства:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 140 \geq 0 \\ 4x - 72 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 140 \leq 16x^2 - 576x + 5184 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10, x \geq 14 \\ x \geq 18 \\ 15x^2 - 572x + 5324 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10, x \geq 14 \\ x \geq 18 \\ x \leq 16\frac{2}{15}, x \geq 22 \end{cases}.$$

Пересечение решений можно записать в виде: $x \geq 22$.

Ответ: $[22; +\infty)$.

Пример 10. $\sqrt{x^2 + 6x - 7} > 2x - 1$.

В этом неравенстве, в отличие от предыдущего, правая часть может принимать значения разных знаков. Рассмотрим эти случаи отдельно:

А) Если выполнены условия $\begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$, то неравенство будет верным: действительно, любое неотрицательное число больше любого отрицательного числа. Следовательно, все решения этой

системы войдут в ответ. Решим полученную систему неравенств: $\begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \leq -7$.

Б) Вторая возможность – выполнение условий $\begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 7 > 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 10x + 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 2.$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

В иррациональных неравенствах, как и в уравнениях, полезно использовать замену переменной.

Пример 11. $3\sqrt{x^2 - 17x + 16} > x^2 - 17x + 12$.

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 17x + 16}$, тогда значения t определяются системой неравенств:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 3t > t^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -1 < t < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t < 4.$$

После обратной замены получим: $0 \leq \sqrt{x^2 - 17x + 16} < 4$. Поскольку левая и правая части этого двойного неравенства неотрицательны, мы можем возвести все три части в квадрат:

$$0 \leq x^2 - 17x + 16 < 16, \begin{cases} x^2 - 17x + 16 \geq 0 \\ x^2 - 17x + 16 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, x \geq 16 \\ 0 < x < 17 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1, 16 \leq x < 17.$$

Ответ: $(0; 1] \cup [16; 17)$.

Если корень четной степени входит в нестрогое неравенство в качестве множителя, то, чтобы избежать потери решений, лучше рассмотреть отдельно случай равенства и строгого неравенства.

Пример 12. $\frac{\sqrt{9x - 8 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$.

$$A) \frac{\sqrt{9x-8-x^2}}{x^2-3x-4} = 0, \quad 9x-8-x^2 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 8.$$

$$B) \frac{\sqrt{9x-8-x^2}}{x^2-3x-4} < 0. \text{ Поскольку числитель дроби при всех допустимых значениях } x \text{ неотрицателен,}$$

знаменатель должен принимать отрицательные значения, и неравенство сводится к системе:

$$\begin{cases} 9x-8-x^2 > 0 \\ x^2-3x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, x > 8 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 4.$$

Объединяя найденные решения, получим окончательный ответ: $1 \leq x < 4, x = 8$.

Еще раз обратите внимание на то, что если бы мы не рассматривали случай равенства отдельно, а

$$\text{решали систему неравенств } \begin{cases} 9x-8-x^2 \geq 0 \\ x^2-3x-4 < 0 \end{cases}, \text{ то потеряли бы решение } x = 8.$$

Ответ: $[1; 4), x = 8$.

Задание 2. Выполните решение уравнений и неравенств

$$1. \sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+x+10} = 5$$

$$2. \sqrt{5x-19} + \sqrt{5x-16} - 3\sqrt{2x-7} = 0$$

$$3. \sqrt{\frac{x-2}{x-5}} - 24\sqrt{\frac{x-5}{x-2}} = 2$$

$$4. \sqrt{x^2+9x-25} = \sqrt{5x+7}$$

$$5. (x^2-6x)\sqrt{3-x} = x(x^2-9x+8)$$

$$6. 5\sqrt{x} = 16 - |x-10|$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-9}}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-9}}} = \frac{\sqrt{x-9}}{6}$$

$$8. \frac{\sqrt{6x+5}}{10x+5} \leq \frac{\sqrt{6x+5}}{5-x}$$

$$9. \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-27} < 7$$

$$10. (x-7)\sqrt{x^2-7x+6} < 49-7x$$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 11

Тема занятия: Решение показательных уравнений и неравенств (2 часа)

Содержание темы: сформировать умения и навыки решения различных показательных уравнений и неравенств.

Планируемые образовательные результаты:

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение:

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Рассмотрите решение показательных уравнений:

$$1. 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$$

Используя свойства показательной функции $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, преобразуем уравнение,

$$3^x \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^1 + 3^x = 21$$

Вынесем общий множитель 3^x за скобки:

$$3^x(9-3+1) = 21$$

$$3^x \cdot 7 = 21$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ. 1

2. Решим уравнение:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$$

Вынесем общий множитель 3^{x-2} за скобки, получаем

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1$$

$$3^{x-2} = 3^0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

3. Решим уравнение.

$$3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$$

Запишем уравнение в виде

$$3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$$

В левой и правой частях уравнения вынесем общие множители

$$2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$$

$$2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$$

Так как $5^{x-2} \neq 0$, то разделив обе части уравнения на $5^{x-2} > 0$, получим

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

4. Решим уравнение.

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Сделаем замену переменной $t = 3^x$, так как $E(a^x) = (0; +\infty)$, то $t > 0$. Заметим, что $9^x = (3^x)^2 = t^2$

Поэтому данное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

По обратной теореме Виета найдем корни уравнения:

$$t_1 = -5 \text{ и } t_2 = 9$$

$$t_1 = -5 - \text{посторонний корень}$$

Откуда получаем

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

Задание 2. Работа с учебником стр.231 №463 (в, г), №464 (в, г), № 468 (в, г).

Задание 3. Решите неравенства

1. Решите неравенство $49 \cdot 7^x < 7^{3x+3}$.

2. Решите неравенство $25 \cdot 5^x - 5^{2x+3} > 0$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0,04$.
4. Решите неравенство $4^{x+1} + 4^{x+2} \leq 5$.
5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \geq 4$.
6. Решите неравенство $0,2 \cdot 2^{x-4} \geq 0,4$.
7. Решите неравенство $3^{5-3x} - 1 \geq 0$.
8. Решите неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2+3x} - 2 > -1$.
9. Решите неравенство $\left(\frac{7}{8}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{8}{7}\right)^{3-2x}$.
10. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 2^x \geq 6$.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 12

Тема занятия: Решение задач «Логарифмы. Логарифмическая функция» (2 часа)

Содержание темы: Обеспечить закрепление понятий: логарифм числа, десятичный и натуральный логарифм; формировать умения и навыки применения свойств логарифма к решению задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Контрольные вопросы.

1. Понятие логарифма числа.
2. Основное логарифмическое тождество.
3. Понятие десятичного логарифма числа.
4. Понятие натурального логарифма числа.
5. Основные свойства логарифмов.
6. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Вычислить. $49^{0,5 \log_7 9}$

Решение. $49^{0,5 \log_7 9} = (7^2)^{0,5 \log_7 9} = 7^{2 \cdot 0,5 \log_7 9} = 7^{\log_7 9} = 9$

Пример 2. Вычислить.

а) $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5}$

$$\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5} = \log_3 \frac{15}{5} + 5 = \log_3 3 + 5 = 1 + 5 = 6$$

Решение.

б) $\log_3 36 - 2 \log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4}$

Решение.

$$\log_3 36 - 2 \log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4} = \log_3 36 - \log_3 2^2 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_3 \frac{36}{4} + \log_2 2^{-2} = \log_3 9 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Пример 3. Упростить выражение. $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \log_4 \sqrt[5]{16}$

Решение.

$$3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \log_4 \sqrt[5]{16} = 3^{\log_2 2^{-2} \cdot \log_3 5} + \frac{1}{5} \lg 100 = 3^{-2} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{2}{5} = \frac{25+18}{45} = \frac{43}{45}$$

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$$

Пример 4. Вычислить.

Решение.

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \frac{\log_3 216}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}} - \frac{\log_3 24}{\frac{\log_3 3}{\log_3 72}} = \frac{\log_3 216}{1} \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 3} - \frac{\log_3 24}{1} \cdot \frac{\log_3 72}{\log_3 3} = \log_3 216 \cdot \log_3 8 - \log_3 24 \cdot \log_3 72 =$$

$$= \log_3 (72 \cdot 3) \cdot \log_3 8 - \log_3 (8 \cdot 3) \cdot \log_3 72 = (\log_3 72 + \log_3 3) \log_3 8 - (\log_3 8 + \log_3 3) \log_3 72 =$$

$$= (\log_3 72 + 1) \log_3 8 - (\log_3 8 + 1) \log_3 72 = \log_3 72 \cdot \log_3 8 + \log_3 8 - \log_3 72 \cdot \log_3 8 - \log_3 72 =$$

$$= \log_3 8 - \log_3 72 = \log_3 \frac{8}{72} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

Пример 5. Решить уравнение. $\log_6 x = 2 \log_6 3 + 4 \log_{36} 2$

Решение.

$$\log_6 x = 2 \log_6 3 + 4 \log_{36} 2$$

$$\log_6 x = \log_6 3^2 + \log_{6^2} 2^4$$

$$\log_6 x = \log_6 9 + \frac{1}{2} \log_6 16$$

$$\log_6 x = \log_6 9 + \log_6 16^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_6 x = \log_6 (9 \cdot 4)$$

$$\log_6 x = \log_6 36$$

$$\log_6 x = 2$$

$$x = 6^2$$

$$x = 36$$

Выполнить следующие задания.

Задание 1. Вычислить.

1. $16^{\log_2 3}$
2. $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 14$
3. $\log_2 50 - 2 \log_2 5 + \log_5 \sqrt{5}$

Задание 3. Упростить выражение

1. $9^{\log_3 2 + \log_5 \frac{1}{25}} + 2^{\log_2 7} \log_9 \sqrt[7]{81}$
2. $\left(\frac{\log_{100} a}{b^{\lg a}} \cdot \frac{\log_{100} b}{a^{\lg b}} \right)^{2 \log_{ab} (a+b)}$

Задание 4. Вычислить

$$\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$$

Задание 5. Решить уравнение
 $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 13

Тема занятия: Логарифмы в окружающем нас мире (4* часа)

Содержание темы: научиться применять логарифм при вычислении пропускной способности канала передачи данных.

Планируемые образовательные результаты: При выполнении заданий практической работы необходимо подробно описать ход решения заданий и дать ответ.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал

Любой *реальный* канал связи подвержен внешним воздействиям, а также в нем могут происходить внутренние процессы, в результате которых искажаются передаваемые сигналы и, следовательно, связанное с ними сообщение. Такие воздействия называются **шумами (помехами)**.

После прохождения сообщения по каналу связи сигналы с помощью приемного преобразователя переводятся в последовательность кодов, которые декодирующим устройством представляются в форме, необходимой приемнику информации. На этапе приема, как и при передаче, преобразователь может быть совмещен с декодирующим устройством (например, радиоприемник или телевизор) или существовать самостоятельно (например, модем).

Характеристиками любой линии связи являются:

- **скорость передачи данных (V),**
- **пропускная способность канала (C)**
- **степень искажения сообщения в процессе передачи ($\varepsilon > 0$).**

Заметим, что максимальная скорость передачи данных равна пропускной способности канала, т. е.

$$V_{\max} = C \quad (1)$$

Вторая теорема Шеннона: При передаче информации по каналу с шумом всегда имеется способ кодирования, при котором сообщение будет передаваться со сколь угодно высокой достоверностью, если скорость передачи не превышает пропускной способности канала.

Из теоремы следует, что в любых случаях при превышении скорости передачи пропускной способности канала возможна потеря информации.

Смысл данной теоремы в том, что при передаче по реальным каналам можно закодировать сообщение таким образом, что действие шумов не приведет к потере информации. Это достигается за счет повышения избыточности кода (т.е. увеличения длины кодовой цепочки); безусловно, возрастает время передачи, что следует считать платой за надежность.

Для расчета пропускной способности канала передачи данных с шумами используется формула Шеннона-Хартли:

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (2)$$

C – пропускная способность канала, бит/с

B – ширина полосы пропускания канала, Гц

S – мощность сигнала, Вт

N – мощность шума, Вт

Интервал частот, используемый данным каналом связи для передачи сигналов, называется **шириной полосы пропускания (B)**.

Влияние шумов определяется соотношением мощности сигнала и мощности помех. Из этого соотношения, в частности, видно, что для увеличения пропускной способности канала связи необходимо увеличивать полосу пропускания, либо улучшать отношение мощности сигнала к мощности помех.

Для сравнения мощностей сигналов, передаваемых по системе связи, часто пользуются логарифмическими единицами – **децибелами (дБ)**.

Децибел составляет 1/10 более крупной единицы, названной в честь А. Г. Белла – изобретателя телефона.

Бел (Б) – это десятичный логарифм отношения двух мощностей:

$$1 \text{ Б} = \frac{S}{N}$$

Для практики бел (Б) слишком крупная единица и при расчетах пользуются децибелами (дБ):

$$1 \text{ дБ} = 10 \cdot \lg \frac{S}{N} \quad (3)$$

Отношение сигнал/шум S/N часто задаётся в децибелах (дБ).

Приведем характеристики некоторых каналов связи:

Вид связи	B , Гц	$\frac{S}{N}$	C , бит/с
Телеграф	120	$\approx 2^6$	640
Телефон	$3 \cdot 10^3$	$\approx 2^{17}$	$5 \cdot 10^4$
Телевидение	$7 \cdot 10^6$	$\approx 2^{17}$	$130 \cdot 10^6$
Компьютерная сеть			до 10^9
Слух человека	$20 \cdot 10^3$		$5 \cdot 10^4$
Глаза человека			$5 \cdot 10^6$

Задания практической работы

Задание 1 Определите пропускную способность некоторого канала связи в зависимости от ширины полосы пропускания и отношения сигнал/шум.

Данные для расчетов представлены в таблице 1

Порядок выполнения задания:

- 1) Найдите пропускную способность канала.
- 2) Определите, каким должно быть отношение сигнал/шум в децибелах, для того, чтобы пропускная способность канала составила 50% от вычисленного значения в пункте 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер варианта	Границы полосы пропускания		$\frac{S}{N}$, дБ
	B_1 (нижняя граница)	B_2 (верхняя граница)	
1	9,4 кГц	32,8 кГц	38
2	2,5 МГц	37,7 МГц	31
3	0,6 кГц	37,5 кГц	40
4	9,8 МГц	22,1 МГц	35
5	9,1 кГц	24,1 кГц	33
6	3,5 МГц	24,7 МГц	38
7	3,3 кГц	38,5 кГц	39
8	8,2 МГц	21,8 МГц	36
9	7,6 кГц	39,9 кГц	35
10	1,9 МГц	22,5 МГц	39

Задание 2 Какова максимальная скорость передачи данных при передаче двоичного сигнала по каналу с полосой пропускания 2 кГц и шумом 10 дБ?

Задание 3 Какое требуется отношение сигнал/шум для достижения в канале пропускной способности 10 Мбит/сек при ширине полосы 2 МГц?

Дополнительное задание

Задание 4 Оцифрованное телевизионное изображение имеет матрицу 480х640 пикселей, причем цвет каждого пиксела кодируется 16 битами.

Телевизионное изображение передается по каналу с шириной полосы 3,5 МГц и отношением сигнал/шум, равным 35 дБ.

Найдите пропускную способность канала.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 14

Тема занятия: Решение задач «Составление таблиц и диаграмм на практике» (8* часа)

Содержание темы: показать на конкретных примерах из жизни практическое применение таблиц и диаграмм.

Планируемые образовательные результаты: закрепить на практике умения строить и редактировать таблицы и диаграммы.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1.

Изучить статистику въезда иностранных туристов в Россию (UNWTO Tourism Highlights).

Число въездных туристских поездок (тыс. чел.)				
	Январь-март 2018 г.	Январь-июнь 2018 г.	Январь-сентябрь 2018 г.	Январь-декабрь 2018 г.
Украина	1 457	3 753	6 648	8 912
Казахстан	1 204	2 356	3 841	4 711
Польша	415	843	1 299	1 725
Финляндия	324	687	1 072	1 416
Китай	135	422	930	1 122

Азербайджан	170	373	619	856
Узбекистан	97	362	603	797
Германия	59	222	469	553
Армения	103	228	406	552
Республика Молдова	70	203	359	491
Таджикистан	75	199	333	458
Абхазия	93	191	309	417
Монголия	82	171	280	378
Киргизия	24	132	267	374
Эстония	70	161	263	357
Латвия	61	134	212	278
Беларусь	25	94	194	249
Турция	48	114	194	239
Литва	51	108	174	237
США	22	97	206	233
Италия	29	80	156	191
Великобритания	23	80	152	180
Франция	29	83	138	171
Израиль	25	65	132	162
Корея	15	53	116	136
Всего	4 910	11 891	20 672	26 852

Задание 2. Построить диаграммы по числу въездных туристских поездок (%):

1. Период январь – март 2018 г. по следующим странам: Финляндия, Армения, Корея, Азербайджан, Монголия.
2. Период январь – сентябрь 2018 г. по следующим странам: Украина, Польша, Германия, США, Израиль.
3. Период Январь – июнь 2018 г. по следующим странам: Эстония, Великобритания, Турция, Италия, Франция.

Задание 3. Изучить статистику выезда российских туристов за рубеж.

Число выездных туристских поездок (тыс.чел.)				
	Январь-март 2018 г.	Январь-июнь 2018 г.	Январь- сентябрь 2018 г.	Январь-декабрь 2018 г.
Абхазия	498	1 272	3 121	3 824
Турция	147	1 366	3 123	3 460
Казахстан	607	1 418	2 486	3 125
Финляндия	705	1 520	2 352	3 067
Египет	487	1 267	1 909	2 244
Украина	314	759	1 266	1 657
Эстония	321	696	1 109	1 477
Польша	275	650	1 008	1 322
Китай	180	491	905	1 284
Германия	251	523	856	1 111
Литва	142	331	569	743
Испания	85	280	592	693
Таиланд	250	355	440	675

Италия	137	317	537	662
Грузия	83	246	506	651
Греция	14	213	602	634
Азербайджан	104	270	460	584
Кипр	24	210	483	550
ОАЭ	142	244	325	472
Болгария	20	147	397	413
Франция	82	192	323	408
Чехия	73	176	274	361
Вьетнам	88	152	212	321
Латвия	63	143	249	312
Израиль	69	156	229	299
Другие страны	761	1 831	3 127	4001
Всего	5 924	15 223	27 459	34 390

Задание 4. Построить диаграммы по числу выездных туристских поездок (%):

1. Период январь – март 2018 г. по следующим странам: Польша, Кипр, Таиланд, Италия, Китай.
2. Период январь – сентябрь 2018 г. по следующим странам: Греция, Чехия, Турция, Латвия, Израиль.
3. Период Январь – июнь 2018 г. по следующим странам: Абхазия, Болгария, ОАЭ, Грузия, Египет.

Задание 5. Составить таблицу расчета доходов фирмы и диаграмму роста доходов на основе данных.

Рост уровня доходов фирмы в абсолютном и процентном отношении

Месяцы	Уровень доходов фирмы в 1998 году, млн.руб.	Уровень доходов фирмы в 1999 году, млн.руб.	Рост уровня доходов фирмы в 1999 году млн.руб
январь	180	200	
февраль	195	210	
март	200	230	
апрель	213	245	
май	240	270	
июнь	254	275	
июль	260	281	
август	265	290	
сентябрь	280	300	
октябрь	290	315	
ноябрь	300	323	
декабрь	325	330	
Всего:			

Выполнение.

1. Составить таблицу расчета доходов фирмы: определить тип, размер и стиль шрифтов для заголовков строк и столбцов: Times New Roman, размер 12,; для остального текста - Times New Roman, размер 10;
2. Вычислить рост уровня доходов фирмы.

3. Вычислить суммарный уровень доходов фирмы за 1999 и 1998 годы, результаты поместить в последней строке второго и третьего столбца соответственно;

4. Построить диаграмму зависимости уровня доходов фирмы за 1999 и 1998 годы по месяцам в виде гистограммы;

5. Построить диаграмму роста уровня доходов фирмы.

Задание 2.

Итоги экзаменационной сессии

1. Посчитайте средний балл каждого студента по всем предметам и по всем студентам одного предмета.
2. Составить круговую диаграмму с отображением среднего балла по предметам.

№ п/п	Ф. И.О.	Математика	Экономика	Информатика	Средний балл
1.	Макаров С.П.	4	5	5	
2.	Иванов П.А.	5	5	5	
3.	Сидорова Н.Н.	3	3	3	
4.	Кушнарева Л.П.	3	4	5	
5.	Токарева Р.В.	5	4	4	
6.	Васильев К.Р.	4	3	4	
Средний балл					

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.